**Tema 3: Recursividad**

**Definición**

* Una **definición recursiva** de una sucesión especifica lo siguiente:
  + Uno o más términos iniciales
  + Una regla para determinar los términos siguientes en función de los términos anteriores
    - Esta regla se llama **relación de recurrencia**
* La relación de recurrencia para la sucesión {an} es una ecuación que expresa el término an en función de uno o más anteriores a él.
* Una **recursión** es definir un ‘objeto’ en términos de si mismo.

**Ejemplos**

| **Sucesión** | **Relación de recurrencia** |
| --- | --- |
| 7, 17, 27, 37… | an = 10+an-1 |
| 1, 10, 100, 1000… | an = 10\*an-1 |
| 1, 3, 6, 10, 15 | an = an-1 + n+1 |
| 1, 2, 6, 24, 120, 720 | an = an-1 \* (n+1) |
| 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 | an = an-1 + an-2 |
| 1, 1, 4, 10, 28, 76 | an = 2(an-1+an-2)[[1]](#footnote-0) |
| 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31 | an = an-1 + an-2 + an-3 |

* Un **coeficiente binomial** (n|k) es una relación de recurrencia. Cada (n|k) se puede expresar en función de su previo: (n|k) = (n-1|k-1) + (n|k-1)
* Otro ejemplo es el **factorial:** n! = n\*(n-1)!

**Ecuación general**

* Siendo una relación de recurrencia an, la ecuación con an en función de n será la **ecuación general**.
* Por ejemplo, en el primer caso de la tabla, an = 10\*n + 7
* Una sucesión se llama **solución** de una relación de recurrencia si sus términos satisfacen la relación de recurrencia.
  + an = 10\*n+7 es solución de an = 10+an-1. Demostración:
  + 10n + 7 == 10 + [ 10(n-1) + 7 ]
  + 10n+7 == 10 + 10n -10 +7
  + 10n+7 = 10n+7

**Definición**

* Se llama **relación de recurrencia lineal** **homogénea con coeficientes constantes**, de orden k, a una expresión de la forma **an = α1an-1 + α2an-2 + … + αk\*an-k,** donde α1, …, αk son números reales y αk=/=0.
  + Una sucesión como la previa no sería homogénea por incluir un 10.
  + Una sucesión como an=n\*an-1 es de lineal de orden 1, pero no tiene coeficientes constantes.
  + an=2\*an-12 es una r.r. no lineal, por tener un término al cuadrado.
* Ejemplo: la secuencia de Fibonacci, que es de orden 2.

**Solución** de RRLHCC con raíces características distintas (únicas)

* Sea an = α1\*an-1 + … + αk \* an-k, con k=/=0.
* Es una RRLHCC de orden k, tal que las **raíces características** r1, …, rk son todas reales y distintas.
  + Buscamos soluciones {an} de la forma **an=rn**, con r=/=0 (el subíndice pasa a ser el exponente). Sustituyendo:
* rn = α1rn-1 + α2rn-2 + … + αkrn-k.
* Dividimos por rn-k para obtener rk = α1rk-1 + α2rk-2 + … + αk.
* **Ecuación característica** de grado k:
  + .
* **Resolvemos** la ecuación característica y obtenemos uno o más valores de r.
* Estos valores de r se toman como paámetros para la ecuación del enunciado.
  + Por ejemplo, en vez de an = an-1+an-2 se escribe an = α1\*() n + α2\*()n, siendo α1 escalares.
* Se reemplaza an y n por los valores iniciales de la recursión. Se obtiene un sistema que nos permite calcular los valores de las constantes α1 y α2

.

**Ejemplos** de soluciones de RRLHCC con raíces distintas (únicas)

* En **Fibonacci**, an=an-1+an-2. Condiciones iniciales: a0=0, a1=1
  + an = rn
  + rn = rn-1 + rn-2. Dividimos todo por rn-2
  + r2 = r + 1
  + r2 - r - 1 = 0
    - r2 - r - 1 = 0. Calculamos los valores de r que cumplen esta ec.
    - r1 = , r2 =
    - an = α1\*() n + α2\*()n, siendo α escalares.
    - a0 = α1\*() 0 + α2\*()0 para n=0
      * 0=α1+α2
    - a1 = α1\*() 1 + α2\*()1 para n=1
      * 1=α1\*()+α2\*()
    - Resolvemos el sistema de dos ecuaciones. Obtenemos α1=, α2=
  + an = ()n - ()n
* **2º ejemplo**: an = 10an-1
  + an = rn
  + rn = 10 \* rn-1. Dividimos todo por rn-1
  + r = 10
  + **Solución general:** an = α1\*10n
    - Conocemos que a0 = 1.
    - a0 = 1 = α1\*10 -> α1 = 1.
    - **an = 1\*10n**

**Solución** de RRLHCC con raíces características repetidas

* Sea an = c1\*an-1 + c2an-2 + … + ckan-k una relación de recurrencia lineal, homogénea y con coeficientes constantes.
* Sean sus raíces r1, …, rs reales y con multiplicidades respectivas m1, …, ms. Las soluciones serán de la forma:
* an = (α10 + α11\*n + … α1m1-1nm1-1)\*r1n + (α20 + α21\*n + … α2m2-1nm2-1)\*r2n + … + (αs0 + αs1\*n + … αsms-1ns1-1)\*r1s, para cualesquiera números reales αij
  + Cada uno de los términos [ (α10 + α11\*n + … α1m1-1nm1-1)\*r1n ] se corresponde con una de las diferentes raíces de la ecuación general. En la ecuación habrá uno de estos términos por cada raíz distinta.
  + El número de sumandos que habrá dentro es igual a la multiplicidad de esta raíz. El último sumando estará multiplicado por nm-1.

Ejemplo 1

* Sea an = 4an-1 - 4an-2
* Orden 2, r2 = 4r - 4
  + r2-4r+4=0 → (r-2)2 = 0
  + La solución es r=2 (doble).
* Solución general: an = (α + βn)2n
  + El único término es el (α + βn)2n, pues 2 es la única raíz. Dentro de este término hay dos sumandos, pues su multiplicidad es 2.
* Parámetros iniciales: a0=2, a1=8
  + a0 = (α + β\*0)2n = 2 => α = 2
  + a1 = (α + β2n = 8 => (2 + β)\*2 = 8 => β = 4
* an = (2+4n)2n

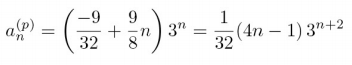
**Solución** de RRLNHCC **no homogénea**

* Sea an = c1\*an-1 + c2an-2 + … + ckan-k + L(n)
* Para solucionar relaciones de este tipo, debemos hallar dos soluciones distintas:
  + **an(p)** es una solución particular de la RRLNHCC.
  + **an(h)** es la fórmula de cualquier solución de la RRLHCC asociada, sin incluír el término L(n).
* Cualquier solución con término general **an = an(h) + an(p)** es solución de la RRLNHCC, y todas las soluciones son de esta forma.

**Ejemplo 2:** Torres de Hanoi

* an = 2an-1 + 1. Debido al + 1, no es homogéneo.
* Para 1 disco debo hacer 1 movimiento. Entonces, a1=1. Al ser an-1, es de orden 1.
* La parte homogénea será an = 2an-1
  + Ec. característica: r = 2.
  + Solución general de la parte homogénea: an(h) = α\*2n
* Buscamos una solución particular a la ec. completa.. Por ejemplo, an(p) = -1.
  + Declaramos que, para cualquier n, an=-1. Entonces, an = -1 y an-1 = -1. Entonces, se cumple la ecuación: an = 2an-1+1, pues -1 = 2\*(-1)+1
  + Esencialmente, reemplazamos tanto an como an-1 por x, y resolvemos la ec.
* Al tener an(p) y an(h), las sumamos:
  + an = an(p) + an(h) = α\*2n -1
  + Parámetro inicial: a1 = 1
  + α\*21 -1 = 1 → α=1.
* Solución: an =α\*2n -1 = **2n-1**

**Ejemplo 3:**

* an = an-2 + n\*3n, y el enunciado dice que la relación tiene una soluciuón particular de la forma an(p) = (β0+β1\*n)3n para algunos valores de β0 y β1.
* Ec. característica de la parte homogénea: r2 = 1. Las raíces son 1,-1. Solución general: an(h) = 1\*α - 1\*ß = α - ß
* La relación tiene una soluciuón particular de la forma an(p) = (β0+β1\*n)3n para algunos valores de β0 y β1. Igualamos las ecuaciones:
  + an = (β0+β1\*n)3n  = an-2 + n\*3n  = (β0+β1\*(n-2))2n-2 + n\*3n.
  + an-2 = (β0+β1\*(n-2))3n-2
* Dividiendo por 3n-2, nos queda (β0+β1\*n)\*9 = β0+β1(n-2) + 9. Creamos un sistema de ecuaciones con los valores n=0 y n=1.
* 8β0+2β1=0, 8β0+10β1=9. La solución es β0=-9/32, β1 = 9/8
* Entonces, una solución particular es: 

**Teorema de soluciones particulares de RRLNHCC**

* En una RRLNHCC an = c1\*an-1 + c2an-2 + … + ckan-k + L(n), donde L(n) = (p0+p1n+..ptnt)sn :
* Si s no es una de las raíces características de la relación homogénea asociada, la relación admite una solución particular de la forma **an(p) = (β0 + β1n +...+βtnt)sn**
* Si s sí es una de las raíces características de la relación homogénea asociada, y tiene multiplicidad m, la relación admite una solución particular de la forma **an(p) = (β0 + β1n +...+βtnt)nmsn**
  + Es decir, aumentamos el grado del polinomio tantas unidades como multiplicidad tenga la base del factor exponencial, s

**Ejemplo: Fórmula de los números triangulares**

* Sea an = 1+2+...+n. Encuentra una RRLCC de la que esta an sea solución, y resuélvela para dar una fórmula de la suma de los n primeros enteros positivos.
* Es de orden 1. Una posible relación sería an = an-1+n, pues en cada iteración sumamos n al número previo. Dividimos esta relación en sus dos partes, con an(h)= an-1 y an(p) una solución particular de an = an-1+q1.
* Empezando por an(h), la ecuación característica sería r-1=0, entonces r=1 y anh = α1n= α.
* Para encontrar la solución particular, utilizamos el teorema previo, viendo L(n) como L(n)=n\*1n, pues r=1 es una raíz característica y su multiplicidad es 1. Tendremos una solución de la forma:
* an(p) = (β0+β1 n)n1n = β0n + β1n2. Sustituímos en la relación de recurrencia previa:
  + (β0n + β1n2) = (β0(n-1)) + β1n2(n-1)2) + n
  + Para n=1 y n=2, β0+β1=1, β0+3β1=2. Resolvemos que β0=β1=½. La solución general de la relación de recurrencia será: an = an(h) + an(p)
* an = α + (n2+n)/2
* Como a1=1 es la condición inicial, concoemos que 1 = α + (1+1)/2, por lo que α=0. Entonces: an = 1+2+...+n = (n+n2)/2. Es la fórmula de los números triangulares.

1. Para esta sucesión es necesario especificar dos datos iniciales, ao y a1, que no vienen dados por la relación de recurrencia sino especificados manualmente. [↑](#footnote-ref-0)